L'EXPRESSION LITTERALE

I- Généralité :

Beaucoup de formules mathématiques sont données à l'aide de lettres :
— l'aire d'un rectangle est égale à $L \times l$, où L désigne la longueur et l la largeur du rectangle ;
— propriété de distributivité s'exprime ainsi : $k(a + b) = ka + kb$.

Comment utiliser une expression littérale ?
Comment trouver une expression littérale à l'aide des données d'un exercice ?

1- Calcul d'aire :

Un rectangle a pour longueur 10 cm et pour largeur 3 cm.

Comment utiliser la formule de l'aire d'un rectangle ?

L'aire d'un rectangle est égale à $L \times l$, où L désigne la longueur et l la largeur du rectangle. On remplace L par 10 et l par 3 dans la formule. On obtient alors $10 \times 3 = 30$. L'aire du rectangle est donc 30 cm^2.

2- Calcul de vitesse :

Une voiture parcourt 28 km en 21 minutes.

Comment calculer la vitesse en km/h ?

La vitesse en km/h est égale à $\frac{d}{t}$ où d est la **distance** en km et t le **temps** en h.

On convertit 21 min en heures : $21 \text{ min} = \frac{21}{0,35} \text{ h} = 0,35\text{h}$.

On remplace d par 28 et t par 0,35 dans la formule. On obtient $v = \frac{28}{0,35} = 80$.
La vitesse de la voiture est 80 km/h.

3- Vérification d'une équation :

Comment vérifier que 3 est la solution de l'équation $5x - 2 = 13$?

On remplace x par 3 dans l'expression $5x - 2$. On obtient $5(\times 3) - 2 = 15 - 2 = 13$. Le nombre 3 est bien solution de l'équation $5x - 2 = 13$.

Quelles expressions littérales utilisant les lettres a et l traduisent le périmètre et l'aire du rectangle AEFD ?

La largeur du rectangle AEFD est EF : on observe que EF = BC = l.

La longueur du rectangle AEFD est AE : on observe que AE = AB - FC = 19 - FC = 19 - a.

Le périmètre de AEFD est donc $2 \times (l + (19 - a))$.

L'aire de AEFD est $1 \times (19 - a)$.

4- Multiple d'un entier :

Comment trouver l'expression littérale traduisant qu'un entier *n* est multiple de 7 ?

Un entier n est multiple de 7 s'il est divisible par 7, c'est-à-dire s'il existe un entier naturel k tel que $\frac{\pi}{7}$ = k.

Cette égalité permet d'écrire $n = 7k$. Cette expression littérale traduit le fait que l'entier n est multiple de 7.
De même, l'expression $n = 5k$ avec k entier naturel traduit le fait que n est multiple de 5.

Quelle expression littérale permet de trouver le milieu de 5 et de 15 ?

Sur la droite graduée ci-dessous, le milieu de 5 et de 15 est 10 :

On observe que : $(5 + 15) \div 2 = 10$. On calcule la somme des deux nombres et on divise par 2.

L'expression littérale permettant de calculer le milieu de deux nombres n et p est $(n + p) \div 2$.
Cela revient aussi à calculer la **moyenne** des deux nombres.

II- Réduction :

Écrire la somme algébrique $A = 5x – (3 + x)$ sous la forme $A = 4x – 3$, cela s'appelle réduire l'expression A.

Quels sont les procédés utilisés ?

1- Règles de calcul :

- **Factoriser une somme algébrique :**

Propriété : pour factoriser une somme algébrique, on utilise la propriété de **distributivité** de la **multiplication** par rapport à l'**addition** et à la **soustraction**.
Cette propriété peut s'énoncer ainsi : a, b et k étant trois nombres,

$ka + kb = k\,(a + b)$
$ka - kb = k\,(a - b)$

Exemple : x représente un nombre.

On veut factoriser l'expression B.

$B = 13{,}3x - 4{,}28x$.

On remarque le facteur commun x : $B = 13{,}3x - 4{,}28x = (13{,}3 - 4{,}28)\,x = 9{,}02x$
Cette dernière expression est une **expression réduite** de B.

Règle : soit a, b, c et d quatre nombres,

$a + (b - c + d) = a + b - c + d$
$a - (b - c + d) = a - b + c - d$

Autrement dit :

si les parenthèses sont précédées du signe **+**, on « conserve » les signes des termes de l'expression entre parenthèses ;

si les parenthèses sont précédées du signe **–**, on « change » les signes des termes de l'expression entre parenthèses.

2- Exemples de réduction :

Dans les exemples suivants, x représente un nombre.

Exemple 1 :

$\boldsymbol{A = 3x - (2 + 7x)}$

On supprime d'abord les parenthèses et on regroupe les termes en x : $A = 3x - 2 - 7x = 3x - 7x - 2$
On factorise x dans $3x - 7x$: $A = (3 - 7)\,x - 2 = -4x - 2$
Finalement, une forme réduite de A est : $-4x - 2$.

Exemple 2 :

$B = x^2 - (3 - x + 5x^2)$
On supprime d'abord les parenthèses : $B = x^2 - 3 + x - 5x^2$

On regroupe les termes semblables (ceux en x^2) : $B = x^2 - 5x^2 + x - 3$

On factorise x^2 dans $x^2 - 5x^2$, que l'on peut écrire aussi $1x^2 - 5x^2$:
$B = (1 - 5)\,x^2 + x - 3$

Finalement, une forme réduite de B est : $-4x^2 + x - 3$.

Exemple 3 :

$C = x\,(3 - 2x) + 5\,(x - 2)$
On commence par développer : $C = 3x - 2xx + 5x - 5 \times 2$
On remplace xx par x^2 et 5×2 par 10 (selon les règles de priorité), puis on regroupe les termes semblables (ceux en x) : $C = 3x + 5x - 2x^2 - 10$

On factorise x dans $3x + 5x$: $C = (3 + 5)\,x - 2x^2 - 10$ $C = 8x - 2x^2 - 10$
Finalement, la forme réduite et ordonnée de C est donc : $-2x^2 + 8x - 10$.

Exemple 4 :

$D = \frac{2}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right) - 5\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

On développe cette expression : $D = \frac{2}{3} x - \frac{2}{3} \times \frac{5}{2} - \left(5 \frac{x}{2} - 5 \times 1\right)$

On supprime les parenthèses : $D = \frac{2}{3} x \ \frac{-2}{3} x - 5 \frac{x}{2} + 5 \times 1$

On effectue les multiplications après avoir simplifié par 2 : $D = \frac{2}{3} x - \frac{5}{3} - 5 \frac{x}{2} + 5$

On regroupe les termes semblables (ceux en x) : $D = \frac{2}{3} x - 5 \frac{x}{2} + 5 - \frac{5}{3}$

$D = \frac{2}{3} x - \frac{5}{2} x + 5 - \frac{5}{3}$

On factorise x dans $\frac{2}{3} x - \frac{5}{2} x$: $D = \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2}\right) x + \left(5 - \frac{5}{3}\right)$

On calcule les sommes à l'intérieur des parenthèses, après avoir réduit au même dénominateur :

$$D = \left(\frac{4}{6} - \frac{15}{6}\right) x + \left(\frac{15}{3} - \frac{5}{3}\right)$$

$$D = \frac{11}{6} x + \frac{10}{3}$$

Finalement, une forme réduite de D est : $D = \frac{11}{6} x + \frac{10}{3}$.

III- Développement :

Développer une expression, c'est transformer un **produit** en **somme algébrique**. Pour cela, on utilise la propriété de **distributivité** de la **multiplication** par rapport à l'**addition** et à la **soustraction**.

1- La formule :

a, b, c et d étant quatre nombres, on a la relation suivante : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

La propriété en question s'appelle parfois la **double distributivité**.

2- Illustration géométrique :

Dans le cas où a, b, c et d sont positifs, la figure 2 illustre cette formule :

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.

En considérant que a, b, c et d sont des longueurs, calculons de deux façons l'aire du grand rectangle :

ses dimensions sont $(a + b)$ et $(c + d)$; son aire est donc : $(a + b)(c + d)$;

son aire est également la somme des aires des quatre petits rectangles soit : $ac + ad + bc + bd$.
On a bien : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

3- Exemples :

Dans les trois exemples suivants, x représente un nombre.

Exemple 1 :

$A = (2x + 3)(x + 5)$

On développe : $A = 2xx + 2x \times 5 + 3x + 3 \times 5$.

On effectue les multiplications et on remplace xx par x^2 : $A = 2x^2 + 10x + 3x + 15$.

On factorise x dans : $10x + 3x$ (on dit qu'on réduit l'expression) : $A = 2x^2 + (10 + 3)\,x + 15$;
$A = 2x^2 + 13x + 15$.

Exemple 2 :

$B = (2 - 3x)(2x + 4)$

On développe :

$B = 2 \times 2x + 2 \times 4 + (-3x)\,2x + (-3x)\,4$;

$B = 4x + 8 + (-6x^2) + (-12x)$.

On ordonne selon les puissances de x et on réduit l'expression : $B = (-6x^2) + (4 - 12)\,x + 8$.

Finalement : $B = -6x^2 - 8x + 8$.

Bien sûr, pour aller plus vite, on peut sauter quelques étapes, mais il faut alors faire très attention aux signes.

Exemple 3 :

$C = (x - 3)(3x - 2)$
$C = 3xx - 2x - 3 \times 3x + 3 \times 2$
$C = 3x^2 - 2x - 9x + 6$
$C = 3x^2 - (2 + 9)\,x + 6$
$C = 3x^2 - 11x + 6$